

## Bagramyan T.E. OPTIMAL RECOVERY OF FUNCTIONS FROM INACCURATE RADON TRANSFORM

The problem of optimal recovery of a function in the Schwarz space from its inaccurate Radon transform is considered. The accuracy of optimal recovery and a family of optimal methods are obtained in explicit form.

*Key words:* Radon transform; optimal recovery.

УДК 62-531.2

## РЕГУЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТНОСТИ ПРОКАТЫВАЕМЫХ ПОЛОС НА БАЗЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

© С. М. Бельский, И. П. Мазур, В. И. Дождиков, В. Б. Васильев

*Ключевые слова:* плоскостность; самоуравновешенная эпора; принцип Сен-Венана; коэффициент ослабления амплитуды.

Проанализировано продольное и поперечное распределение самоуравновешенной составляющей упругих напряжений в полосе, а также коэффициент ослабления амплитуды. Результаты использованы для разработки новых методов для регулирования плоскостности прокатываемых полос.

**Введение**

Проблема формирования геометрических характеристик полос остается одной из основных в листопрокатном производстве. Неравномерность распределения по ширине полосы переднего натяжения и неоднородность температурного поля вызывает изменение распределения выходных скоростей течения металла [1]. Напряжения, вызванные неравномерностью выходных скоростей полосы, при снятии натяжения превращаются в остаточные, что приводит к формированию таких геометрических дефектов как "краевая" и "центральная" волна. Для компенсации неравномерности остаточных напряжений на некотором расстоянии от очага деформации по известной эпоре удельных натяжений в полосе на выходе из клетки необходимо приложить компенсирующую самоуравновешенную эпору продольных напряжений. Тем самым появляется возможность управлять плоскостностью прокатываемых полос.

**Постановка задачи**

В соответствии с принципом Сен-Венана амплитуда неравномерности компенсирующих удельных натяжений уменьшается с удалением от места их возникновения, поэтому возникает вопрос о зависимости коэффициента ослабления амплитуды самоуравновешенной эпоры продольных напряжений, приложенных к какому-либо сечению прокатываемой полосы, от расстояния до этого сечения. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом, аналогичным описанному в [2], но с некоторыми отличиями: вместо растягивающей нагрузки приложим к сторонам прямоугольной пластинки единичной толщины, длиной  $2a$  и шириной  $2b$ , самоуравновешенную нагрузку, распределенную по параболическому закону (рис. 1). Энергия деформации такой пластинки для плоского напряженного состояния запишется следующим образом:

$$V = \frac{1}{2E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2] dx dy, \quad (1)$$

где  $\nu$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

$$x = \pm a: \tau_{xy}^0 = 0, \sigma_x^0 = S \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]; \quad y = \pm b: \tau_{xy}^0 = 0, \sigma_y^0 = 0.$$

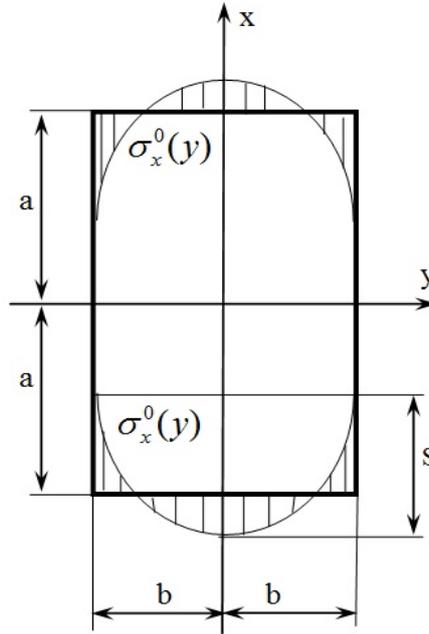


Рис. 1. Схема нагружения и граничные условия

Для односвязной границы, как в нашем случае, распределение напряжений не зависит от упругих постоянных материала пластинки [2], поэтому полагаем  $\nu = 0$  и вводим функцию напряжений  $\varphi$ . Подставляя в выражение (1) соотношения теории упругости

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

получим следующее выражение:

$$V = \frac{1}{2E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

### Метод решения

Возьмем в качестве функции напряжений выражение

$$\varphi = \frac{S}{6} y^2 - \frac{S}{12b^2} y^4 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \dots),$$

которое удовлетворяет граничным условиям, а неизвестные коэффициенты, в соответствии с методом Рэлея–Ритца, находятся из условия

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (3)$$

где  $i = 1 \dots n$ . Для повышения точности расчетов примем  $i = 5$ , тогда функция напряжений имеет следующий вид

$$\varphi^{(5)} = \frac{S}{6} y^2 - \frac{S}{12b^2} y^4 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \left( \alpha_1^{(5)} + \alpha_2^{(5)} x^2 + \alpha_3^{(5)} y^2 + \alpha_4^{(5)} x^4 + \alpha_5^{(5)} y^4 \right).$$

Тогда условие (3) запишется в виде системы пяти уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}\alpha_1^{(5)} + A_{12}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{13}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{14}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{15}a^4\alpha_5^{(5)} = \frac{S}{a^4b^2}; \\ A_{21}\alpha_1^{(5)} + A_{22}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{23}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{24}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{25}a^4\alpha_5^{(5)} = \frac{S}{a^4b^2}; \\ A_{31}\alpha_1^{(5)} + A_{32}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{33}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{34}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{35}a^4\alpha_5^{(5)} = \frac{S}{a^4b^2}; \\ A_{41}\alpha_1^{(5)} + A_{42}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{43}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{44}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{45}a^4\alpha_5^{(5)} = \frac{S}{a^4b^2}; \\ A_{51}\alpha_1^{(5)} + A_{52}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{53}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{54}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{55}a^4\alpha_5^{(5)} = \frac{S}{a^4b^2}; \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left( \frac{64}{7} + \frac{256}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{12} = \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{49} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{13} = \left( \frac{64}{49} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right); \\ A_{14} &= \left( \frac{64 \times 3}{77 \times 13} + \frac{256}{49 \times 33} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{49 \times 3} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{15} = \left( \frac{64}{49 \times 3} \frac{b^4}{a^4} + \frac{256}{49 \times 33} \frac{b^6}{a^6} + \frac{64 \times 3}{77 \times 13} \frac{b^8}{a^8} \right); \\ A_{21} &= \left( \frac{64}{11} + \frac{64}{7} \frac{b^2}{a^2} \right); A_{22} = \left( \frac{64 \times 3}{11 \times 13} + \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 3}{7} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{23} = \left( \frac{64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right); \\ A_{24} &= \left( \frac{256}{11 \times 13} + \frac{512}{13 \times 33} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 53}{3 \times 77} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{32} = \left( \frac{64}{77} + \frac{64}{77} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{25} &= \left( \frac{64}{77 \times 3} \frac{b^4}{a^4} + \frac{64 \times 3}{77 \times 13} \frac{b^8}{a^8} \right); A_{34} = \left( \frac{64 \times 3}{77 \times 13} + \frac{64}{7 \times 33} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{33} &= \left( \frac{64 \times 3}{7} \frac{b^2}{a^2} + \frac{256}{77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{64 \times 3}{11 \times 13} \frac{b^6}{a^6} \right); A_{31} = \left( \frac{64}{7} + \frac{64}{11} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{35} &= \left( \frac{53 \times 64}{7 \times 33} \frac{b^4}{a^4} + \frac{512}{33 \times 13} \frac{b^6}{a^6} + \frac{64}{11 \times 13} \frac{b^8}{a^8} \right); \\ A_{41} &= \left( \frac{64 \times 9}{11 \times 13} - \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{43} &= \left( \frac{64 \times 9}{77 \times 13} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77} \frac{b^6}{a^6} \right); A_{42} = \left( \frac{64 \times 3}{11 \times 13} + \frac{512}{11 \times 13} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 53}{77} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{44} &= \left( \frac{64 \times 21}{11 \times 13 \times 17} + \frac{256 \times 9}{77 \times 13} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 643}{77 \times 13} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{45} &= \left( \frac{64 \times 3}{13 \times 77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{256}{77 \times 33} \frac{b^6}{a^6} + \frac{64 \times 3}{77 \times 13} \frac{b^8}{a^8} \right); A_{51} = \left( \frac{64}{7} - \frac{256}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 9}{11 \times 13} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{52} &= \left( \frac{64}{77} + \frac{64 \times 9}{77 \times 13} \frac{b^4}{a^4} \right); A_{53} = \left( \frac{53 \times 64}{77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{512}{11 \times 13} \frac{b^4}{a^4} + \frac{64 \times 3}{11 \times 13} \frac{b^6}{a^6} \right); \\ A_{54} &= \left( \frac{64 \times 3}{13 \times 77} + \frac{256}{33 \times 77} \frac{b^2}{a^2} + \frac{64 \times 3}{77 \times 13} \frac{b^4}{a^4} \right); \\ A_{55} &= \left( \frac{643 \times 64}{13 \times 77} \frac{b^4}{a^4} + \frac{256 \times 9}{13 \times 77} \frac{b^6}{a^6} + \frac{64 \times 21}{11 \times 13 \times 17} \frac{b^8}{a^8} \right). \end{aligned}$$

Сделав замену переменных  $\alpha_1^{(5)} = x_1^{(5)} \frac{S}{a^4 b^2}$ ;  $\alpha_2^{(5)} a^2 = x_2^{(5)} \frac{S}{a^4 b^2}$ ;  $\alpha_3^{(5)} a^2 = x_3^{(5)} \frac{S}{a^4 b^2}$ ;  $\alpha_4^{(5)} a^4 = x_4^{(5)} \frac{S}{a^4 b^2}$ ;  $\alpha_5^{(5)} a^4 = x_5^{(5)} \frac{S}{a^4 b^2}$ , получим из (4) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}x_1^{(5)} + A_{12}x_2^{(5)} + A_{13}x_3^{(5)} + A_{14}x_4^{(5)} + A_{15}x_5^{(5)} = 1; \\ A_{21}x_1^{(5)} + A_{22}x_2^{(5)} + A_{23}x_3^{(5)} + A_{24}x_4^{(5)} + A_{25}x_5^{(5)} = 1; \\ A_{31}x_1^{(5)} + A_{32}x_2^{(5)} + A_{33}x_3^{(5)} + A_{34}x_4^{(5)} + A_{35}x_5^{(5)} = 1; \\ A_{41}x_1^{(5)} + A_{42}x_2^{(5)} + A_{43}x_3^{(5)} + A_{44}x_4^{(5)} + A_{45}x_5^{(5)} = 1; \\ A_{51}x_1^{(5)} + A_{52}x_2^{(5)} + A_{53}x_3^{(5)} + A_{54}x_4^{(5)} + A_{55}x_5^{(5)} = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Решая (5) и используя (2), получим выражение для функции распределения продольных напряжений по длине и ширине пластинки:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(5)} = & S \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] - 12S \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \times \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left[ x_1^{(5)} + x_2^{(5)} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + x_3^{(5)} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + x_4^{(5)} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + x_5^{(5)} \left( \frac{b}{a} \right)^4 \left( \frac{y}{b} \right)^4 \right] - \\ & - 2S \left( \frac{b}{a} \right)^2 \times \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \times \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \times \left\{ \left( \frac{y}{b} \right)^2 \times \left[ 8x_3^{(5)} + 16x_5^{(5)} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \times \left[ x_3^{(5)} + 6x_5^{(5)} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Назовем коэффициентом ослабления амплитуды самоуравновешенной эпюры  $K(x)$  отношение величины амплитуды на расстоянии  $x$  от места воздействия к величине исходной амплитуды

$$K(x) = \frac{\sigma_x(x)|_{y=0} - \sigma_x(x)|_{y=b}}{\sigma_x(x=a)|_{y=0} - \sigma_x(x=a)|_{y=b}}. \quad (7)$$

Зависимость этого коэффициента от расстояния рассчитали при помощи выражения (6). Результаты расчета представлены на рис. 2: тонкой линии соответствует случай  $a/b = 1$ , штрих-пунктирной –  $a/b = 2$ , толстой –  $a/b = 3$ .

Анализ результатов расчета показывает, что протяженность зоны влияния самоуравновешенной составляющей эпюры продольных упругих напряжений не превышает  $1,6b$ . Следовательно, продольные упругие напряжения, возникшие в полосе шириной  $B$  на расстоянии  $L$  от очага деформации, необходимо учитывать для анализа течения металла, если  $L \leq 0,8B$ .

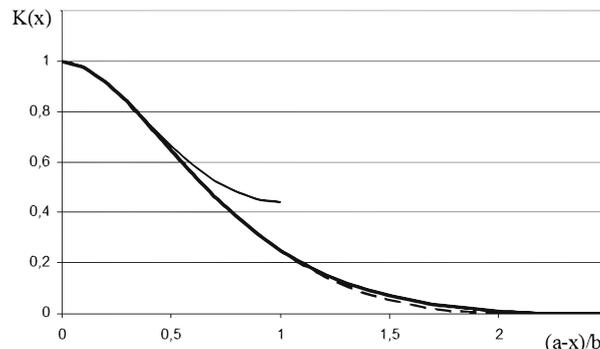


Рис. 2. Зависимость коэффициента ослабления  $K(x)$  от расстояния

### Регулирование плоскостности

Рассмотрим методику регулирования плоскостности прокатываемых полос, основанную на следующем положении: если к выходному сечению очага деформации приложить неравномерную эпюру напряжений, то возникшая неравномерность скоростей течения металла на выходе очага деформации компенсирует эту неравномерность напряжений.

Допустим, что полоса на выходе клетки находится под воздействием суммы двух эпюр продольных напряжений: постоянного переднего  $\sigma_1$  и неравномерной самоуравновешенной с амплитудой  $\Delta\sigma$ , способствующую краевой волнистости прокатываемой полосы (рис. 3, кривая 1).

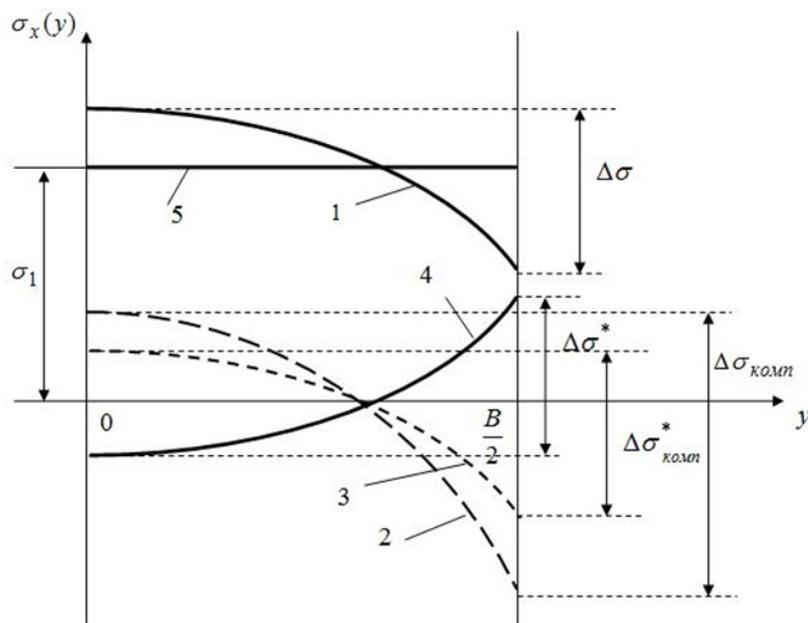


Рис. 3. Принцип регулирования плоскостности прокатываемых полос

Для компенсации этой неравномерности к выходному сечению очага деформации необходимо приложить самоуравновешенную эпюру переднего натяжения  $\Delta\sigma_{комп}^*$  (рис. 3, кривая 3). Это вызовет течение металла, компенсирующее  $\Delta\sigma_{комп}^*$ . После снятия  $\Delta\sigma_{комп}^*$  в полосе возникнут остаточные напряжения  $\Delta\sigma^*$ , равные по амплитуде  $\Delta\sigma_{комп}^*$ , но противоположные по знаку (рис. 3, кривая 4), которые в свою очередь компенсируют  $\Delta\sigma$ . В результате такого воздействия в полосе исчезнут остаточные напряжения (рис. 3, кривая 5).

Если компенсирующая эпюра переднего натяжения создается в сечении полосы, находящемся на некотором расстоянии от очага деформации, то необходимо учесть принцип Сен-Венана и увеличить амплитуду создаваемой неравномерности (рис. 3, кривая 2):

$$\Delta\sigma_{комп} = \frac{\Delta\sigma_{комп}^*}{K(x_0)},$$

где  $x_0$  – расстояние между местом создания компенсирующей эпюры и выходным сечением очага деформации.

### Выводы

Разработана математическая модель распределения продольных и поперечных напряжений в полосе от приложения самоуравновешенной эпюры напряжений. На базе разработанной модели предложена методика регулирования плоскостности прокатываемых полос путем создания компенсирующей эпюры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельский С.М.* Влияние формы эпюры переднего удельного натяжения на распределение давления прокатки и выходных напряжений по ширине полосы // Известия вузов. Чёрная металлургия. 2008. № 1. С. 43-46.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С.Шапиро.- 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 560 с.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

Belsky S.M., Masur I.P., Dozhdikov V.I., Vasilyev V.B. ROLLED STRIPS FLATNESS CONTROL ON THE BASIS OF MATHEMATICAL MODEL OF LONGITUDINAL STRESSES DISTRIBUTION

The longitudinal and transversal distribution of the self-balancing component of elastic stresses in the rolled strip was analyzed as well as the amplitude attenuation coefficient. The results of this analysis are used for a design of new rolled strips flatness control methods.

*Key words:* flatness; self-balancing diagram; St Venan principle; amplitude attenuation coefficient.

УДК 517.9

## ВОЗМУЩЕНИЕ ВЫПУКЛОЗНАЧНОГО ВОЛЬТЕРРОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ И ЗАМКНУТОСТИ ЗНАЧЕНИЙ

© А. И. Булгаков, А. А. Григоренко

*Ключевые слова:* возмущение вольтерровых операторов; локальная разрешимость; продолжаемость решений; априорная ограниченность; квазирешения.

Изучается включение, правая часть которого состоит из суммы значений выпуклозначного вольтеррового оператора и суперпозиции однозначного вольтеррового оператора и многозначного вольтеррового отображения, значения которого являются выпуклыми по переключению подмножествами в пространстве суммируемых функций. Для такого включения сформулированы теоремы разрешимости и продолжаемости решений, получено основное свойство квазирешений таких включений. Изучено включение, зависящее от параметра, принадлежащего метрическому пространству.

Возмущенное включение для многозначных отображений определено в работах [1–6], как включение в пространстве непрерывных функций, правая часть которого является алгебраической суммой значений двух многозначных отображений одно из них имеет замкнутые выпуклые образы, а второе имеет значения не обладающие этим свойством. Для таких включений в этих работах получены их основные свойства, при этом многозначное отображение, определенное правой частью этих включений, вообще говоря, может не являться